

DATA SCIENCE 2

VORLESUNG 2 - INTRO

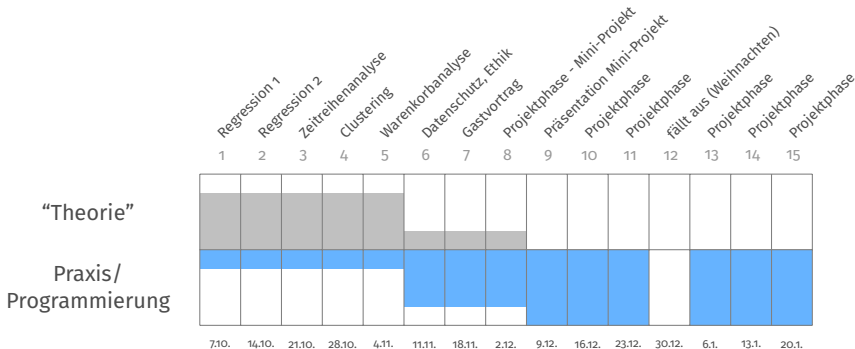
PROF. DR. CHRISTIAN BOCKERMANN

HOCHSCHULE BOCHUM

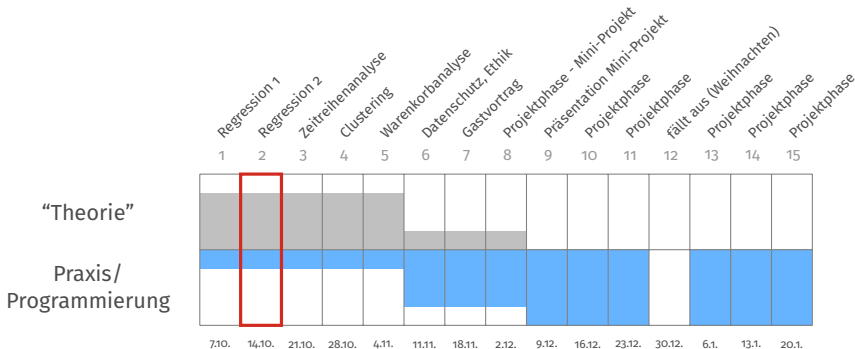
WINTERSEMESTER 2021/2022

- 1 Wiederholung - lineare Regression
- 2 Overfitting, Modell-Komplexität
- 3 SciKit Learn – Pre-Processing

Themen der Vorlesung



Themen der Vorlesung



Wiederholung - lineare Regression

Regression liefert reellwertige Vorhersagen

- Für Regression gilt $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$
- Menge $\mathbf{X} \times \mathbf{y}$, d.h. jedem Beispiel x_i ist ein $y_i \in \mathbb{R}$ zugeordnet
- Qualitätsfunktion $q : (\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \times (\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}) \rightarrow \mathbb{R}$

Regression liefert reellwertige Vorhersagen

- Für Regression gilt $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$
- Menge $\mathbf{X} \times \mathbf{y}$, d.h. jedem Beispiel x_i ist ein $y_i \in \mathbb{R}$ zugeordnet
- Qualitätsfunktion $q : (\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \times (\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}) \rightarrow \mathbb{R}$

Ziel:

- Finde Modell

$$f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y},$$

das die Qualitätsfunktion optimiert.

Auch hier wieder: Lernen als **Optimierungsproblem!**

Lineare Regression

Einfache Modell-Klasse linearer Funktionen

$$\begin{aligned}\hat{f}(\mathbf{x}) &= b + \sum_{i=1}^p w_i x_i \\ &= \sum_{i=0}^p w_i x_i \quad \text{mit } w_0 = b, x_0 = 1 \\ &= \mathbf{w}^T \mathbf{x} = \hat{f}_{\mathbf{w}}(\mathbf{x})\end{aligned}$$

Lineare Regression

Einfache Modell-Klasse linearer Funktionen

$$\begin{aligned}\hat{f}(\mathbf{x}) &= b + \sum_{i=1}^p w_i x_i \\ &= \sum_{i=0}^p w_i x_i \quad \text{mit } w_0 = b, x_0 = 1 \\ &= \mathbf{w}^T \mathbf{x} = \hat{f}_{\mathbf{w}}(\mathbf{x})\end{aligned}$$

Parameter $\mathbf{w} = (w_0, w_1, \dots, w_p)$ bestimmen das Modell

Lineare Regression

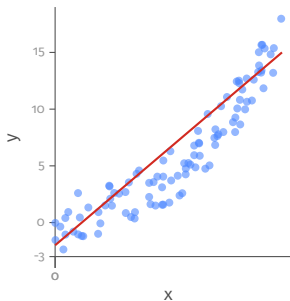
Einfache Modell-Klasse linearer Funktionen

$$\begin{aligned}\hat{f}(\mathbf{x}) &= b + \sum_{i=1}^p w_i x_i \\ &= \sum_{i=0}^p w_i x_i \quad \text{mit } w_0 = b, x_0 = 1 \\ &= \mathbf{w}^T \mathbf{x} = \hat{f}_{\mathbf{w}}(\mathbf{x})\end{aligned}$$

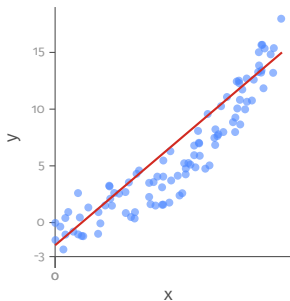
Parameter $\mathbf{w} = (w_0, w_1, \dots, w_p)$ bestimmen das Modell

Idee: Bestimme \mathbf{w} so, dass der Trainingsfehler minimal wird!

Was ist, wenn die Daten **nicht** linear erklärbar sind?



Was ist, wenn die Daten **nicht** linear erklärbar sind?



Funktionsklasse linearer Funktionen
reicht nicht immer aus!

Polynome für Multiple Regression

Erweiterung auf mehrere Merkmale:

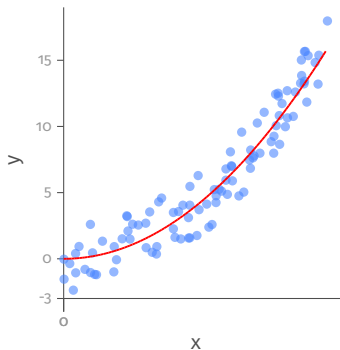
$$X_1, X_2 \Rightarrow X_1, X_2, X_1X_2, X_1^2, X_2^2$$

x_1	x_2
0.445	0.259
0.158	0.528
0.487	0.561
0.755	0.884
0.495	0.312



x_1	x_2	x_1x_2	x_1^2	x_2^2
0.445	0.259	0.115	0.198	0.067
0.158	0.528	0.083	0.025	0.278
0.487	0.561	0.274	0.237	0.315
0.755	0.884	0.668	0.571	0.781
0.495	0.312	0.154	0.245	0.097

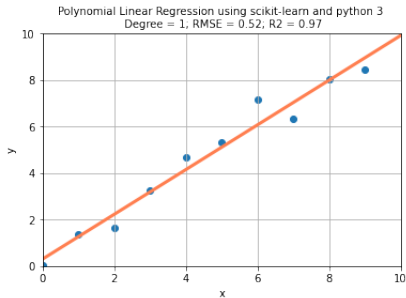
Polynom 2-ten Grades



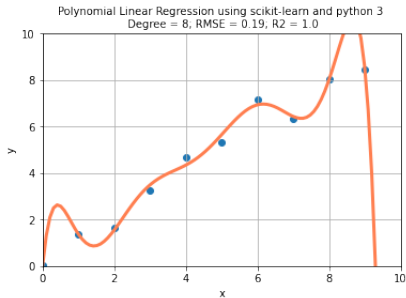
Generierte Daten und das Polynom $q(x) = 4x^2$

Overfitting, Modell-Komplexität

Optimierung auf geringen Trainingsfehler

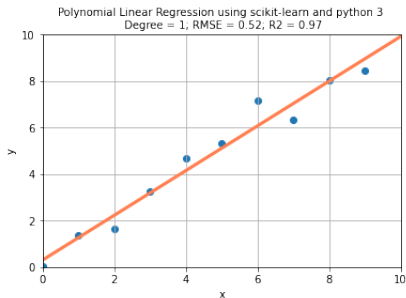


$Err_{rmse} = 0.52$
Niedrige Komplexität

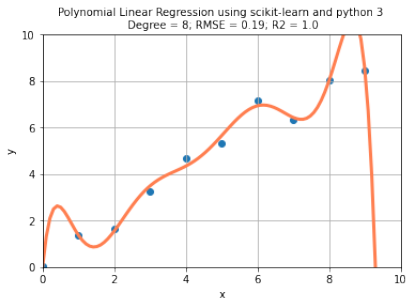


$Err_{rmse} = 0.19$
Hohe Komplexität

Optimierung auf geringen Trainingsfehler



$Err_{rmse} = 0.52$
Niedrige Komplexität



$Err_{rmse} = 0.19$
Hohe Komplexität

Frage: Welches ist das bessere Modell?

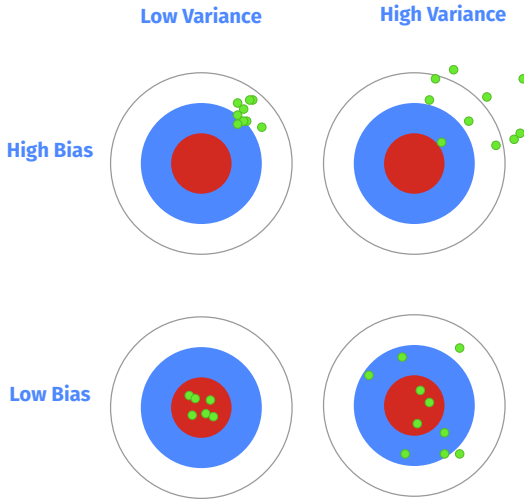
Expected Error, Verzerrung und Varianz

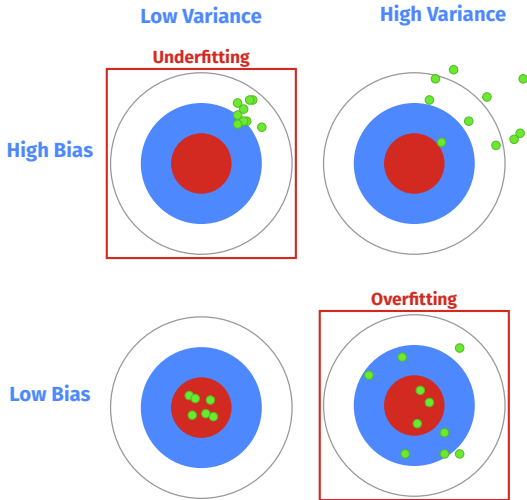
Der **erwartete Fehler** unseres Modells \hat{f} ist

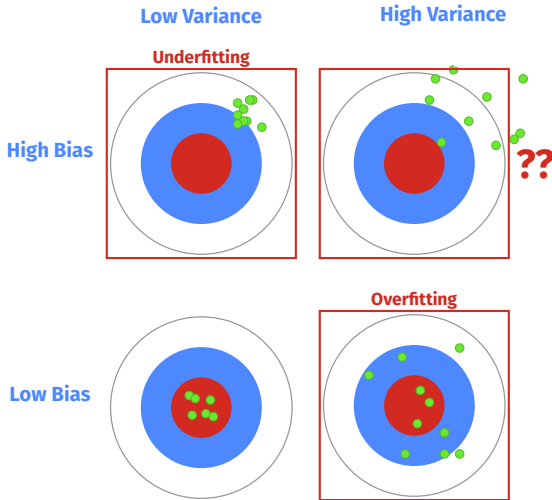
$$Err_{exp}(x) = E \left[(Y - \hat{f}(x))^2 \right]$$

Err_{exp} läßt sich aufteilen in Verzerrung (Bias) und Varianz:

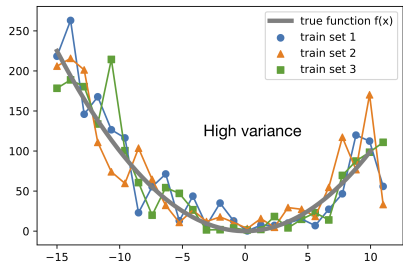
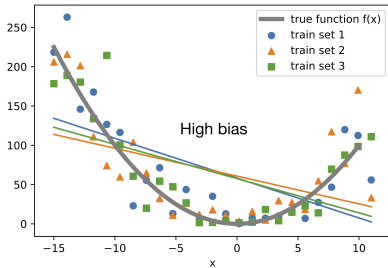
$$Err_{exp}(x) = \text{Bias}(\hat{f})^2 + \text{Var}(\hat{f}) + \text{unvermeidbarer Fehler}$$

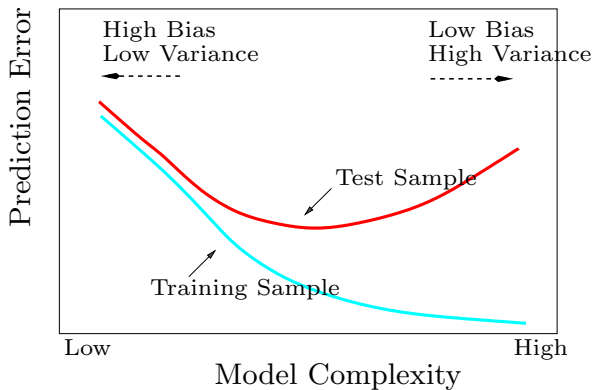






Beispiel: Bias / Variance





Wie kontrollieren wir die Balance?

- Hohe Modell-Komplexität führt zu niedrigem Bias, hoher Varianz
- Niedrige Modell-Komplexität zu hohem Bias, niedriger Varianz

Modell-Komplexität

Modell-Komplexität ergibt sich z.B. aus

- dem Grad der Polynome (Regression)
- der Tiefe von Bäumen

Wie kontrollieren wir die Modell-Komplexität?

Maß für Modell-Komplexität in Fehler-Funktion aufnehmen:

$$\arg \min_{\mathbf{w}} \underbrace{\sum_{\mathbf{x}, y} (y - f_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}))^2}_{\text{Fehler}} + \lambda \underbrace{C(f_{\mathbf{w}})}_{\text{Komplexität}}$$

Parameter λ steuert Schwerpunkt (Fehler vs. Modellkomplexität)

Idee: Wenn w viele Nullen hat \rightarrow geringe Komplexität

Wir können die Modellkomplexität an w "ablesen":

$$w' = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 8 \\ 31 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$4 + x^2 + 8x^3 + 31x^4 + 19x^5$$

$$w'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$4x^2 + 19x^5$$

Idee: Wenn w viele Nullen hat \rightarrow geringe Komplexität

Wir können die Modellkomplexität an w "ablesen":

$$w' = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 8 \\ 31 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$4 + x^2 + 8x^3 + 31x^4 + 19x^5$$

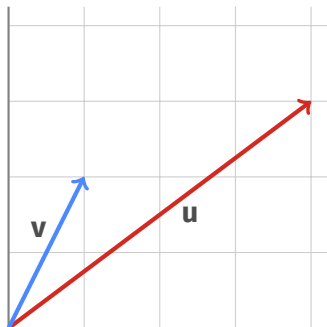
$$w'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$4x^2 + 19x^5$$

Statt Nullen sind auch viele kleine Werte gut, dann beeinflussen viele Komponenten die Funktion nicht so stark.

Frage: Wann hat ein Vektor w viele kleine Werte?

Norm eines Vektors v entspricht der Länge von v



$$\|v\| = 2.235$$

$$\|u\| = 5.0$$

Data Science 1: Foliensatz 7, Folie 9 und Übungsblatt 7

Regularisierung der Modellkomplexität

Modellkomplexität von $f_{\mathbf{w}}$ über Parametervektor \mathbf{w} messen:

$$\|\mathbf{w}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^p w_i^2}$$

Regularisierung der Modellkomplexität

Modellkomplexität von $f_{\mathbf{w}}$ über Parametervektor \mathbf{w} messen:

$$\|\mathbf{w}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^p w_i^2}$$

Beispiel: Ridge Regression

Optimierungsfunktion der Ridge Regression:

$$\arg \min_{\mathbf{w}} \left\{ \sum_{i=1}^n (y_i - \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i)^2 + \lambda \sum_{i=1}^p w_i^2 \right\}$$

$\|\mathbf{w}\|_2^2$ als Komplexitätsmaß (quadrierte L_2 -Norm)

SciKit Learn – Pre-Processing

Beispiel: Min-Max Skalierung

Alle numerischen Attribute werden auf das Interval $[0, 1]$ skaliert.

```
# Parameter bestimmen (fit):  
x_min = min(df['x'])  
x_max = max(df['x'])  
  
# Daten transformieren (transform):  
df['x'] = (df['x'] - x_min) / (x_max - x_min)
```

Data Science 1: Übungsblatt 6, Aufgabe 2 und Foliensatz 6, Folien 26+27

Beispiel: Min-Max Skalierung

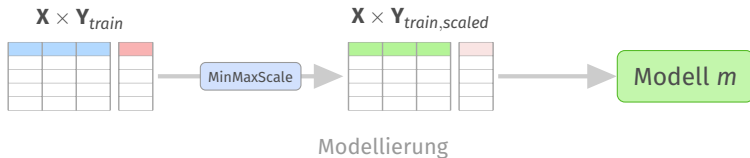
Alle numerischen Attribute werden auf das Interval $[0, 1]$ skaliert.

```
# Parameter bestimmen (fit):  
x_min = min(df['x'])  
x_max = max(df['x'])  
  
# Daten transformieren (transform):  
df['x'] = (df['x'] - x_min) / (x_max - x_min)
```

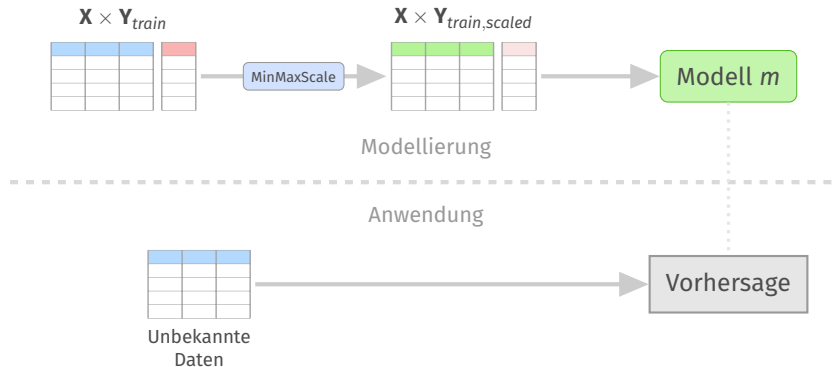
Data Science 1: Übungsblatt 6, Aufgabe 2 und Foliensatz 6, Folien 26+27

Die Parameter brauchen wir, wenn wir später Daten nochmal **auf die gleiche Weise** vorverarbeiten müssen!

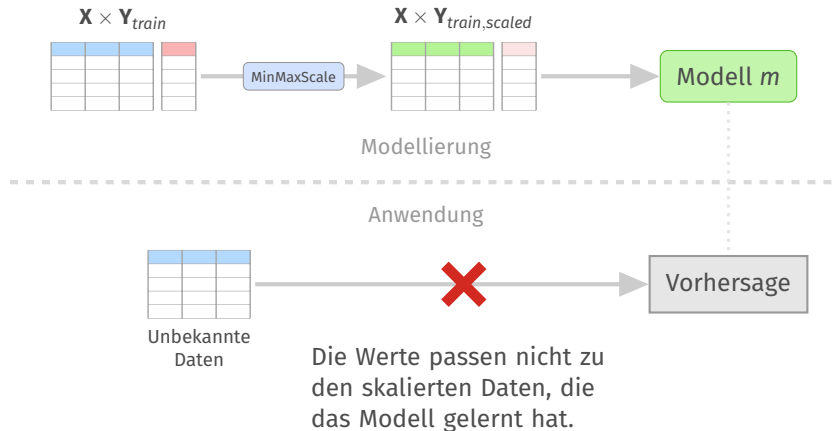
Beispiel: Min-Max Skalierung



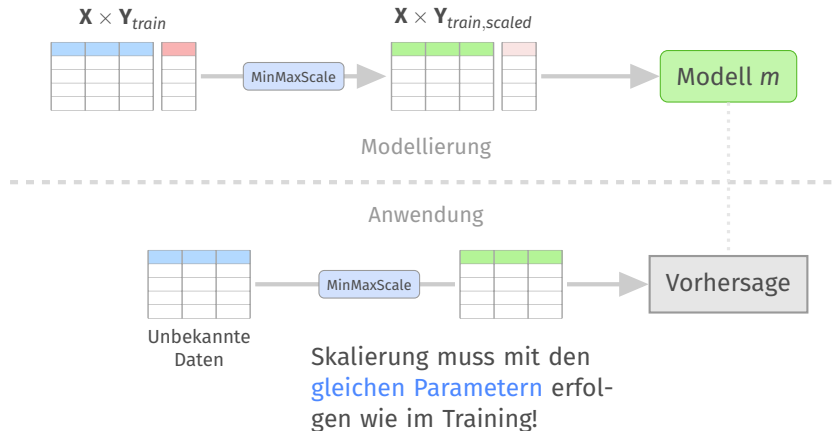
Beispiel: Min-Max Skalierung



Beispiel: Min-Max Skalierung



Beispiel: Min-Max Skalierung



Min-Max Skalierung mit SciKit Learn

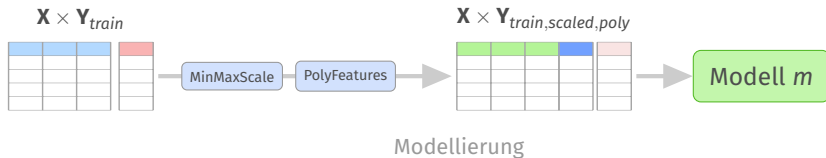
```
from sklearn.preprocessing import MinMaxScaler

df = ... # read DataFrame

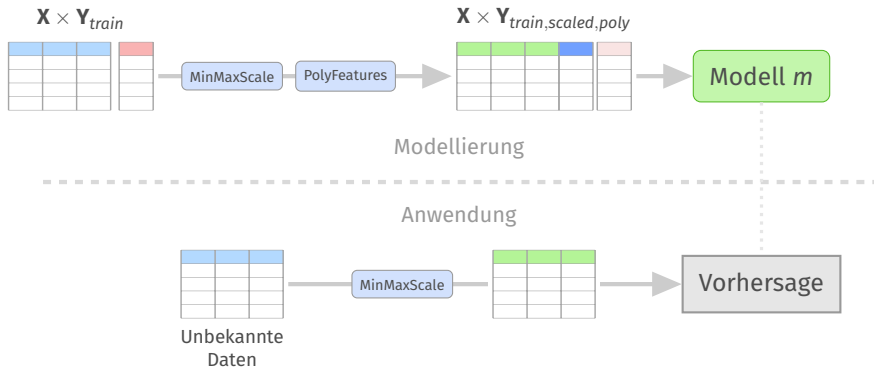
scaler = MinMaxScaler()
scaler.fit(df)

# scaler hat jetzt die min/max Werte gelernt:
scaler.data_max_
scaler.data_min_
```

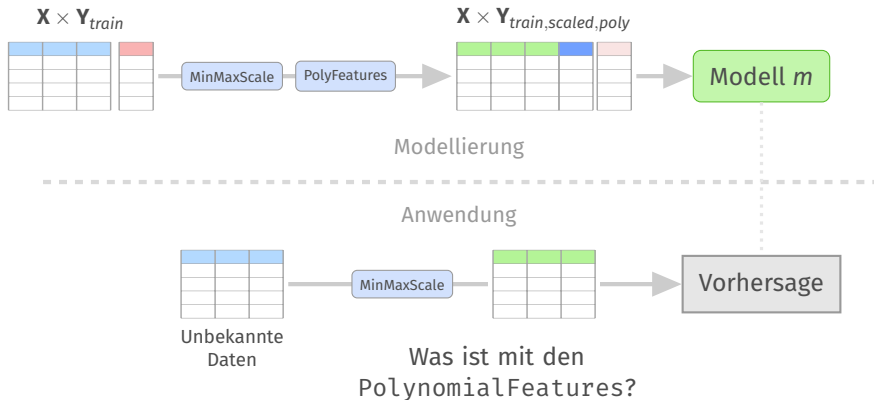
Beispiel: Min-Max Skalierung, Polynomial Regression



Beispiel: Min-Max Skalierung, Polynomial Regression



Beispiel: Min-Max Skalierung, Polynomial Regression



Pipeline: Mehrere Pre-Processing Schritte zusammengefasst

```
from sklearn.preprocessing ...
from sklearn.pipeline import Pipeline
from sklearn.pipeline import make_pipeline

# Pipeline mit 2 Schritten:
scaler = MinMaxScaler()
poly = PolynomialFeatures(degree=4)

pipeline = Pipeline([('Scaling', scaler), ('Features',
                                           ,poly)])

# kurz:
pipeline = make_pipeline(scaler, poly)
```

Pipeline ist selbst wieder Preprocessor

Pipeline definieren und Schritte anpassen/anwenden:

```
# alle Schritte anpassen  
pipeline.fit(data)  
  
# alle Schritte anwenden  
transformed = pipeline.transform(data)
```